ブロックで学ぶ

中学入試 算数・中学からの数学

聖光学院中・高等学校教諭　名塩隆史◉著

CUTT
カットシステム

はじめに

本書は，小学校の算数で学ぶ数の計算法，および中学入試問題で出題される様々な考え方，そしてその背景あるいは延長上にある中学高校数学について解説したものです。

本書のテーマの一つは，ブロックを用いて数や式，そして概念をイメージでとらえる「可視化」にあります。そもそも算数文章題の○○算は，タイプに応じて様々な図の使い方をします。ブロックで表そうとすることによって，各手法の共通点と相違点が明確になります。また抽象的な概念であるはずの数に色や形を与えること（「メタファー」としての扱い）で，数式の意味をイメージとして把握することができ，さらに具体的に手を動かして考えることができるようになります。さらに，数式をブロックで可視化することで説明がしやすくなり，概念や手法を「ストーリー」として頭に印象づけることが容易になるものと期待できます。「可視化」「メタファー」「ストーリー化」はいずれも本書のコンセプトにつながるレゴ®シリアスプレイ®のメソッド（付録 B）のキーワードになっています。

もう 1 つは「近似」という視点です。算数の問題ではこれまで「 1 つの答えを求める」かつ「きれいに答えが出る」問題を取り上げることがもっぱらでした。しかし現実の問題に応用しようとすると，例えばくねくね曲がった領域の面積や立体の体積は，その曲線や曲面が特殊なものでない限り，中学高校で教わる数学をもってしてでも正確に計算することができません。しかしブロックで近似して求めるのでよければ小学生の知識でも十分求めることができます（5.7,10.5,10.6 節）。そもそも PC の画面上の図形は点の集まりとして表示されていることからも，「近似」の意義は納得できるでしょう。

さらに今後プログラミング教育が導入されることもあり，特にレゴ®社のレゴ®マインドストーム®や（株）ソニー・グローバルエデュケーションの KOOV ®といったロボット教材を用いて学ぶことを念頭に置いた際に役に立つ，算数・数学の概念（第 6,10,11 章の座標・速さ・加速運動）を紹介しています。プログラミングにも算数や数学の概念は必要不可欠で，プログラミングのために算数数学を学ぶという考え方もありますが，逆にロボットを動かすという達成感が得られるであろう目標を通じて，算数や数学の概念を学んでいくという道もあります。ロボットに限らず，「手を動かして具体的なものに触れながら考える」ことで学習は促進されると言われています。第 8 章はその例ですが，第 4 章の○○算も数をお金のように物として扱

うという点では同じといえるでしょう。

最後に本書は小学校の算数と中学数学の橋渡しを意図しています。それゆえ両者の大きな差である「負の数」と「文字式」の取り扱いが障壁となってしまっていることは否めません。第 6 章までが主として小学算数，第 7 章以降が主として中学数学となっていて，負の数の扱いについては極力使わないように配慮しましたが，文字式については，解説であえて積極的に用いている箇所があり，少し難しく感じるかもしれません。そのほかにも，小学校算数と中学数学の用語の使い方の違いにより分かりづらくなっている箇所が多々ありますが，ご容赦いただきたいと思います。

本書で扱う問題は主として算数や数学の基本原理に関するものですが，**「基本問題＝易しい」ではなく，「本質を学ぶための問題」**として扱っていますので，ものによってはかなり難しく感じると思います。しかも**算数数学の中で不得意分野として挙げられるものが多くあります**。逆に言えばそれだけ奥が深い考え方が潜んでいるということになります。

読者層としては，中学入試を考えていらっしゃるご家庭の保護者の方，算数を学びなおしたい社会人の方，中学以降の数学とのつながりを知りたい意欲的な小学生，少し難しい問題について学びたい中学生を想定しています。**特に算数がそこまで得意ではない小学生の方は保護者の方と読まれることをお勧めします**。基本的にどの箇所・問題から読み進めても構いません。必要な知識は章の冒頭と問題の直後に参照すべき箇所を指定しています。

また，各章あるいは節ごとに難易度を指定していますので参考にしてください。

- A・・・小学校算数の教科書の内容
- B・・・中学入試算数で知っておくべき内容
- C・・・中学入試算数でも上級者向けの内容
- D・・・中学以降で学ぶ数学またはプログラミングで必要な算数・数学

（中学入試の範囲は暗黙に決まっていて，基本的に ABC がついている章・節となります。）

基本問題はその数ページ後に解説を，その他の練習・応用・研究問題は巻末の付録 A に解答を用意しています。いくつかの問題に時間をかけて取り組むだけでも十分効果はあるでしょう。練習問題は決して多くはありませんので，十分な実力をつけるには巻末の参考文献をはじめ，問題集をいくつかこなす必要があります。

また，本書はブロックを用いることを想定していますが，4 種類のサイズで合計 30 個程度のブロックがあれば大抵の問題には足りますし，イメージすることができれば紙と鉛筆で代用することができます。ご自宅にあるブロックで足りないようでしたら，レゴ®クラシックというブロックセットのシリーズがありますので，それを購入されることをお勧めします。

この本の出版は，様々な方々の協力なしには達成されるものではありませんでした。まず本書の元となる数学講座の開講を承諾していただいた聖光学院中・高等学校校長の工藤誠一先生には，日頃から多くの面でお世話になっています。物理学の本質を伝えることを第一とし，理解の手助けとなる数々のオリジナルかつ難しい問題を作成し，生徒からの質問を非常に大切にされる同校理科の村山郁男先生には，その作問・教材の開発の仕方を学んだほか，在学当時から現在に至るまで「近似」に関する議論に応じて下さり，本書のコンテンツにも活かされています。その他，多くの先生方との教材に関する日頃の議論も本書に活かされています。中学入試算数のコンテンツの多くは，私に算数文章題を図で解くことを最初に教えていただいた小学校の恩師によるものです。さらに勤務校で担当しているロボットプログラミングの授業については，（株）ソニー・グローバルエデュケーション（代表取締役社長　磯津政明氏）の方々の協力を賜り，算数数学教育の新たな方向性を知る機会となりました。教育ライターのおおたとしまさ氏には，度々私の教材や講座をメディア及び著書（[16]）で取り上げて下さり，難しいはずの問題についても受験生の保護者の視点で大変わかりやすく紹介していただいています。

また，勤務校の今春の卒業生で数学研究会に所属していた折笠俊一郎君，安保亮君，阿部寛生君，近藤憲信君，山口大輔君は，原稿に目を通して，誤植や内容面で様々な指摘をしてくれました。その他，これまで１５年間に渡り行ってきた聖光塾数学講座を受講された受講生全員に感謝申し上げます。

そして，本書はレゴ®シリアスプレイ®のファシリテータトレーニングをされていて，STEM教育にも造詣の深い（株）ロバート・ラスムセン・アンド・アソシエイツ（代表取締役社長　蓮沼孝氏）の石原正雄氏の紹介により実現に至りました。同メソッドの学校現場での導入においても大変貴重なアドバイスを賜りました。

最後になりますが，（株）カットシステム代表取締役社長の石塚勝敏氏，武井さん，山口さんはじめ編集部の方々に多大なる感謝を申し上げます。

2019 年 5 月

聖光学院中・高等学校教諭

名塩　隆史

目次

はじめに iii

第 1 章　数をブロックで表現する（A） 1
1.1　ブロックの種類と呼び方・本書で必要なブロックの数 2
1.2　直線状に並べたブロックで数を表す 3
1.3　長方形状に並べたブロックで数を表す 4
1.4　わり算の 2 つの意味と表現 7
1.5　様々なサイズのブロックを「1」として数を表す 8
1.6　複数の色のブロックで数を表す 11

第 2 章　分数をブロックで表現する（A） 13
2.1　分数のブロックでの表現と分数のたし算 14
2.2　分数のかけ算 19
2.3　分数のわり算 23

第 3 章　小数・割合・比をブロックで表現する 27
3.1　小数の表現と計算（A） 28
3.2　有限小数と循環小数（C） 31
3.3　同種類の量の割合（A） 32
3.4　異なる種類の量の割合・単位量あたりの大きさ（1 あたり量）（A） 39
3.5　比の概念（A） 43

第 4 章　未知の数量をブロックで表現する（B） 49
4.1　未知の数量をブロックで表す 50
4.2　算数文章題入門 1〜和差算・分配算・年齢算・倍数算 52
4.3　算数文章題入門 2〜消去算（方程式入門） 54
4.4　算数文章題入門 3〜割合と比に関する問題・相当算 57

第 5 章　面積をブロックで表現する　61
5.1　かけ算と面積図（B）　62
5.2　かけ算の筆算の原理と分配法則（A）　63
5.3　算数文章題 4〜つるかめ算・過不足算（B）　68
5.4　平均の考え方（A）　71
5.5　算数文章題 5〜塩水算（つるかめ算 + 平均）（B）　74
5.6　算数文章題 6〜ニュートン算（C）　79
5.7　円の面積の近似（A）　81
5.8　平方完成（D）　85
5.9　ピタゴラスの定理と平方根（CD）　87

第 6 章　移動をブロックで表現する 1〜速さが一定の移動　93
6.1　速さ・時間・移動距離（B）　94
6.2　算数文章題 7〜旅人算・流水算・仕事算・相対速度（B）　103
6.3　移動の変化を表すグラフを活用する（C）　109
6.4　負（マイナス）の数と計算法（D）　115

第 7 章　素数をブロックで表現する　121
7.1　約数と倍数・素因数分解（B）　122
7.2　最大公約数と最小公倍数（B）　125
7.3　指数法則・約数の個数と総和（D）　130
7.4　巨大な数を近似・推定する（フェルミ推定）（D）　138
7.5　無理数の証明と互除法（D）　140

第 8 章　物をブロックで表現する〜算数・数学での実験と数列の発見　143
8.1　ハノイの塔〜漸化式・数学的帰納法（BD）　145
8.2　タイルの敷き詰め問題（CD）　154
8.3　数列の和の公式（CD）　158

第 9 章　人や物をブロックで表現する〜組合せを数える　163
9.1　数えることの定義と順列（B）　164
9.2　同じものを区別して並べる（C）　166
9.3　組合せの総数（D）　170
9.4　特殊な数え方〜円順列・重複組合せ（D）　175
9.5　パスカルの三角形とフラクタル図形（D）　179

第 10 章　空間をブロックで表現する　185
10.1　空間内の位置の把握〜座標・立方体の見取り図（BD）　186
10.2　ブロックで作られたモデルと空間座標の対応（BD）　190
10.3　2 次元の図から 3 次元の様子をイメージする（B）　194
10.4　立方体の切断面の作図とブロックでの表現（C）　197
10.5　三角錐・円錐・球の体積の近似（D）　209
10.6　球体の作成と体積の近似（B）　215

第 11 章　移動をブロックで表現する 2〜速さが変化する場合（D）　217
11.1　時間と瞬間の関係性　218
11.2　等速の移動と速さが変化していく移動の違い　221
11.3　移動距離→移動の速さ（微分の考え方）　226
11.4　移動の速さ→移動距離（積分の考え方）　230

第 12 章　つながりの様子を探る〜グラフ理論入門（D）　235

付録 A　練習問題・応用問題・研究問題の解答　241

付録 B　レゴ®シリアスプレイ®メソッドと学校での実践について　271
B.1　レゴ®シリアスプレイ®の基本のプロセス　272
B.2　メタファーとしてのレゴ®ブロック　273
B.3　モデルどうしの関係性と統合　274
B.4　モデルどうしのコネクションとシステムの作成　275
B.5　学校現場での実践例　276
B.6　教科を横断する学びとしてのレゴ®シリアスプレイ®メソッド　278

あとがき　281

参考文献　283

第1章

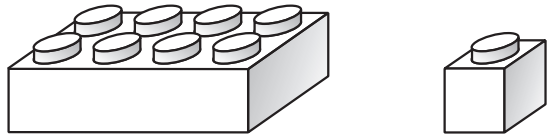
難易度 A

数をブロックで表現する

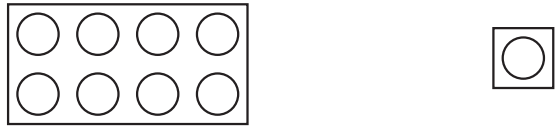
最初に 1，2，3，4，……という数をブロックで表現する方法からはじめます。特に 1 という数を様々なサイズのブロックで表すことで,「1」があらゆる量を数で表すための基準（単位）になるということを確認してもらいます。ここで学んだことが「分数」や「割合」「比」といった概念の理解に大きく影響していきます。

1.1　ブロックの種類と呼び方・本書で必要なブロックの数

この本で必要とするブロック（たとえばレゴ®ブロック）は，下の図のように，丸い突起（**ポッチ**または**スタッズ**という）がついたブロックで，そのポッチは長方形状に付いているものを想定します。上から見たときに，左図のように縦に 2 個，横に 4 個のポッチがついているブロックを **2 × 4 のブロック**と呼ぶことにします。右図は 1 × 1 のブロックといいます。



これらのブロックは立体としてみることは少なく，上からみた様子がわかれば十分で，2 × 4 のブロック，1 × 1 のブロックは下の図のように表すことにします。



基準となる 1 × 1 のブロックがある程度用意できることが望ましいのですが，レゴ®ブロックの市販のキットに 1 × 1 のブロックはあまり入ってなく，かわりに 1 × 2 や 2 × 2 のブロックはたくさん入っています。しかし 1.5 節で触れるように，すべての数の基準になる 1 という数の様々な表現方法が分かれば，1 × 1 のブロックの代わりにこれらの少し大きいサイズのブロックで代用することができます。代用すること自体が，「割合」の概念の理解を深めてくれるでしょう。

本書の問題に取り組むにあたっては，ほとんどの場合ブロックはイメージができればなくても支障はありません。必要としても色は関係なく 1 × 1，1 × 2，2 × 2，2 × 4 のブロックが **8** 個ずつあれば十分です。逆に **1.6** 節で触れるように，色で区別をする必要がある場合でも，４種類の色のブロックがサイズ関係なく **8** 個ずつあれば十分です。
（第 **10** 章のみプレートがあると便利です。）

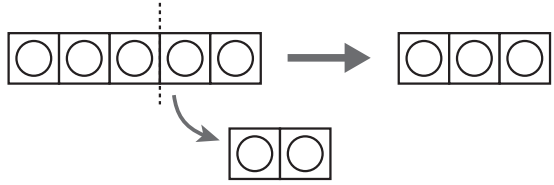
1.2　直線状に並べたブロックで数を表す

まず，次の図のような 1×1 のブロックだけを用いて数を表すことを考えます。（手元になくてもイメージできれば十分です。1.5 節で 1×2 や 2×2 のブロックで代用する方法を説明します。）

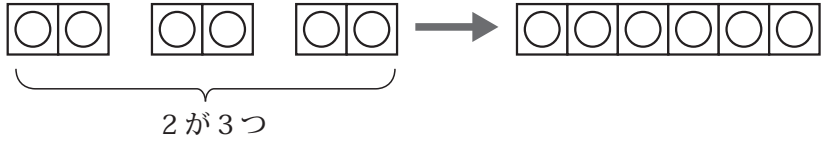
この 1×1 のブロックで「1」という数を表すことにすると，例えば「3」という数は，1×1 のブロック 3 つを並べて，

と表すことができます。そして「$2 + 3 = 5$」という「たし算」は，1×1 のブロック 2 個と 3 個があり，これらを（つなげ）あわせると 5 個になることを表します。

また，「$5 - 2 = 3$」という「ひき算」は，5 個のブロックが置かれた状態から 2 個取り去ると，3 個残るということを表します。



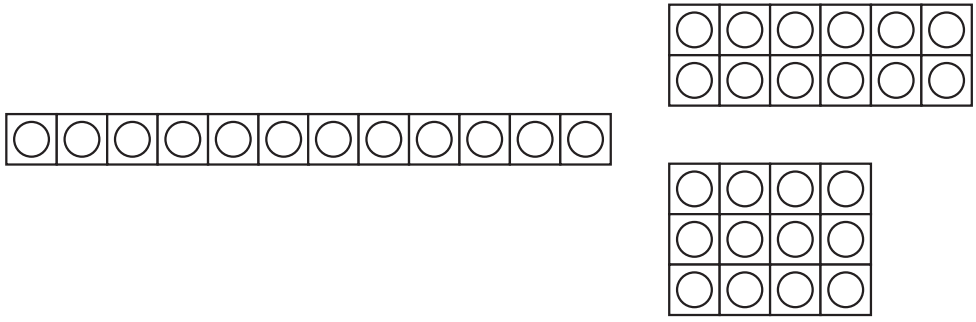
さらに，「$2 \times 3 = 6$」というかけ算は，「2 個のブロックの組」が 3 個あることを表していて，これらをあわせると 6 個あることを表します。



このように，整数 1，2，3，$\cdots$ のたし算やひき算，かけ算は**ブロックを横に並べて**表すことができます。

1.3　長方形状に並べたブロックで数を表す

例えば 12 という数は，1×12，2×6，3×4 といった「かけ算」の結果として表せる数です。これらのかけ算は，下図のように 1×1 のブロック 12 個をそれぞれ「縦が 1 個，横が 12 個」「縦が 2 個，横が 6 個」「縦が 3 個，横が 4 個」の長方形状に並べた状況を表していると考えられます。



この考え方を活かすと，次のような疑問を解決することが出来ます。実際に手元にブロックをいくつか用意して, かけ算をブロックで表して考えてみてください。

基本問題　1.1: かけ算九九の表を見て

下のかけ算九九の表をみると，$4 \times 6 = 24$ と $5 \times 5 = 25$ はどちらのかけ算についても，かけている 2 数の合計は 10 であるのに，かけ算すると 1 だけ数が違うことに気がつきます。同じことは $6 \times 8 = 48$，$7 \times 7 = 49$ についてもいえます。この「1」だけ違いがでてしまう理由を，具体的にこれらのかけ算をブロックで表して説明しなさい。

	1	2	3	4	5	6	……
1	1	2	3	4	5	6	……
2	2	4	6	8	10	12	……
3	3	6	9	12	15	18	……
4	4	8	12	16	20	24	……
5	5	10	15	20	25	30	……
6	6	12	18	24	30	36	……
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

考え方　最初の問題にしては難しく感じるかもしれません。
そもそもブロックの個数に限りがあると思います。3×5 と 4×4 でも全く同様のことが言えますし，ほかのかけ算で考えても構いません。また，1×1 のブロック以外のサイズのブロックを混ぜながら表しても問題はありません。ブロックがなくても図を描いていくことで考えられます。大切なのは**かけ算を図でイメージする**ことです。

このようなブロックの並べ方による数の表現法は，「面積」の表現にも関係があります。それは面積の意味が，

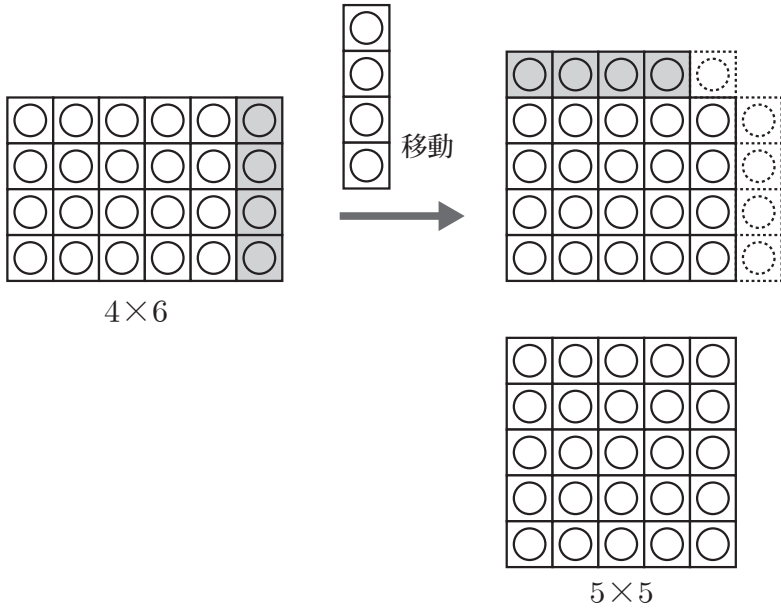
面積とは

図形の面積とは，1 辺の長さが 1 cm の正方形の面積を 1 cm^2 であるとしたとき，この正方形の何個分の広さになるかを表した量です。

となっていることによります。縦が 3 cm, 横が 4 cm の長方形は，1 辺の長さが 1 cm の正方形が縦に 3 個横に 4 個に並べられてできていることから，面積は $1\,[\mathrm{cm}^2] \times (3 \times 4) = 12\,[\mathrm{cm}^2]$ と計算できることを，前ページのブロックの並べ方は示しています。

基本問題 1.1 の解説

4×6 と 5×5 を下図のように表します。4×6 の右端の 4 個のブロックを図のように上の列に移動すると，5×5 の並べ方から 1 個分の隙間ができることがわかります。これが違いを表す「1」の正体ということになります。



追加の問題

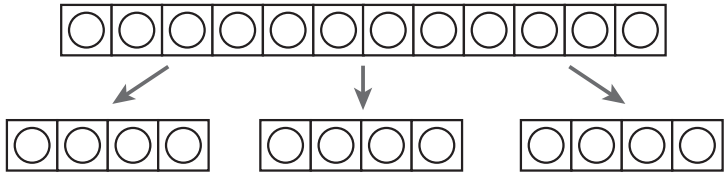
同じように，3×7 と 5×5 の値の違いは 4 で，2×8 と 5×5 の値の違いは 9 となります。これらの値が意味することを，図やブロックを用いて説明しなさい。

→答えは第 5 章（基本問題 5.2）で明らかになります。

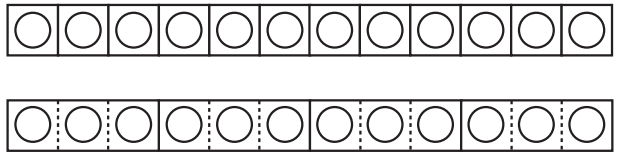
1.4　わり算の 2 つの意味と表現

$12 \div 3 = 4$ というわり算には 2 つの意味があり，ブロックによって違いが表現できます。まず 1×1 のブロックを 12 個直線状に並べてある状態を考えます。

わり算の一つ目の意味は．これら 12 個のブロックを 3 つの組に均等に分けるときの『1 つ分はいくつか』(3 人が同じ個数ずつ持つようにするときの『1 人分はいくつか』）というもので，下の図のように「(1 × 1 のブロック） 4 個」ずつ分けられることがわかります。



2 つめの意味は，12 個は 3 個 のブロックの組（を基準とすると）『何個分であるのか（何倍か)』というもので，下の図のように 3 個のブロック「4 つ分」であることがわかります。



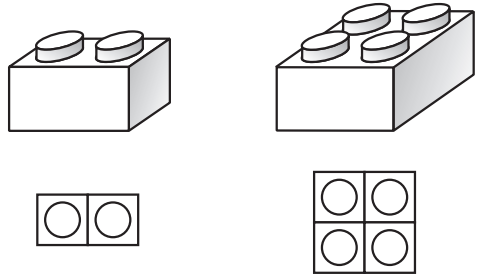
これら 2 つのわり算，答えが分かりやすいのはどちらでしょうか。
2 つ目の意味は「ひき算を複数回行う」見方で，3 個のブロックを順に取り去っていくと，何回でなくなるかを調べて求めることができます。それに対して最初のほうは，3 人にまず 1 個ずつ配り，次に 2 個目を配り，・・という操作が必要になり少し面倒です。そこで実際にわり算を計算する際は，「3 に何をかけると 12 になるのか」という「かけ算の逆」という見方をしていることに注目しておきましょう。(→この考え方は **2.3 節 分数のわり算**で必要になります。)

今度は 1×1 のブロック 12 個が長方形状に並べてある状態を考えます。

この図は「3 人で分けるとき，1 人分が 4 個である」ことを表しているとみることもできますし，「3 個ずつ分けると，「3 個の組」が 4 つ分できる」ことを表しているとみることもできます。このように長方形状に並べると，**わり算の 2 つの意味を同時に表現**することができます。

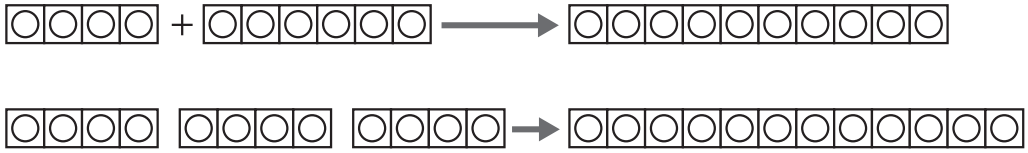
1.5　様々なサイズのブロックを「1」として数を表す

1.1 節で触れましたが, レゴ®ブロックをセットで購入しようとすると, 思いのほか 1×1 のブロックが少ないことに気づかされます。むしろ下図の 1×2 や 2×2 のブロックの方がたくさん持っているという方が大半であるかと思います。



そこで 1×2 のブロックでこれまで 1×1 のブロックで表した数や計算を表してみましょう。まず「1」を 1×2 のブロック 1 個で表すことにします。すると「3」は下図のように 1×2 のブロック 3 個で表すことができます。

「$2 + 3 = 5$」や「$2 \times 3 = 6$」といった計算も，次図のようにサイズが変わった以外は同じ表現ができます。（それぞれ 1×1 のブロック 10 個分，12 個分になりますが, 表している数はそれぞれ「5」と「6」です。）



このように基準となる数「1」を，どのサイズのブロックで表しても正しく解釈することができれば問題はありません。**「ブロック 1 個分」というように「1」を表していることには変わりはありませんし，この「1」こそが 3.3 節で触れる「1 単位量（1 あたり量）」に相当します。**もちろん「1」をどのサイズのブロックで表したかで，ほかの数の表現の見た目は変わります。

次の問題で,「1」をどのサイズのブロックを用いて表現したのかを見出す練習をしましょう。

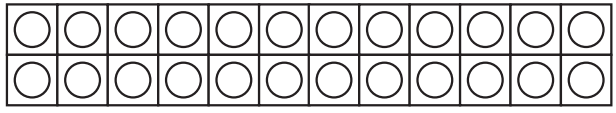
基本問題　1.2: 数のブロックでの表し方

上の図は 1×1 のブロックが 12 個つながった状況を表していますが,「1」をどのサイズのブロックで表したのかによって，表す数が変わります。たとえば「1」を 1×1 のブロックで表すと 12 個分であるから，上のブロックは「12」を表します。

(1)「1」を 1×2 のブロックで表したとき，上のブロックはいくつを表しますか。（1×2 のブロックを使って実際に並べましょう。）

(2)「1」を 1×4 のブロックで表したとき，上のブロックはいくつを表しますか。

(3) 上のブロックが「2」を表すのは,「1」をどのサイズのブロックで表すときですか。



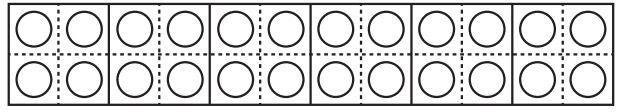
(4) 上の図は 2×2 のブロックをいくつか並べたもので，ある「数」を表しています。2×2 のブロックが「1」を表すとき，上の図はいくつを表していますか。

ほかにもいくつか自分でブロックを並べてみて問題を作ってみて，じっくりと練習をしましょう。数をブロックで見立てて考えることで，次章以降の分数や比の考え方が分かりやすくなります。

基本問題 1.2 の解説

(1) 下のように実際に 1×2 のブロックで並べると，6 個必要であることがわかります。計算式では，$12 \div 2 = 6$ で求めることができます。したがって $\boxed{6}$

(2) 同じようにして 1×4 のブロックで並べると，3 個必要であることがわかります。計算式では，$12 \div 4 = 3$ で求めることができます。（図は省略します。実際に表してみてください。）したがって $\boxed{3}$.

(3)「2」を表すのは，あるブロック 2 個で表したときであるから，1 個は $\boxed{1 \times 6 \text{ のサイズのブロック}}$ であることがわかります。計算式は $12 \div 2 = 6$ です。

(4) 2×2 のブロックで並べてみると,6 個必要なことがわかります。計算式では，$12 \div 2 = 6$ で求めることができます。したがって $\boxed{6}$.